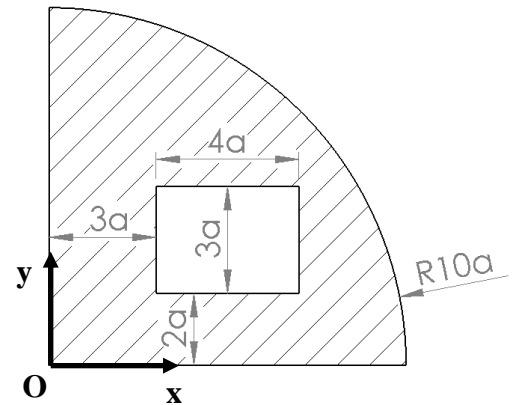




ΘΕΜΑ 1^ο – Μονάδες 4.0

Για τη διατομή του σχήματος να υπολογιστούν:

- α) το κέντρο βάρους ως προς το σύστημα συντεταγμένων Oxy που εμφανίζεται (1 μονάδα)
- β) οι κεντροβαρικές ροπές αδράνειας (2 μονάδες)
- γ) οι ροπές αδράνειας ως προς το υπάρχον σύστημα συντεταγμένων Oxy . (1 μονάδα)

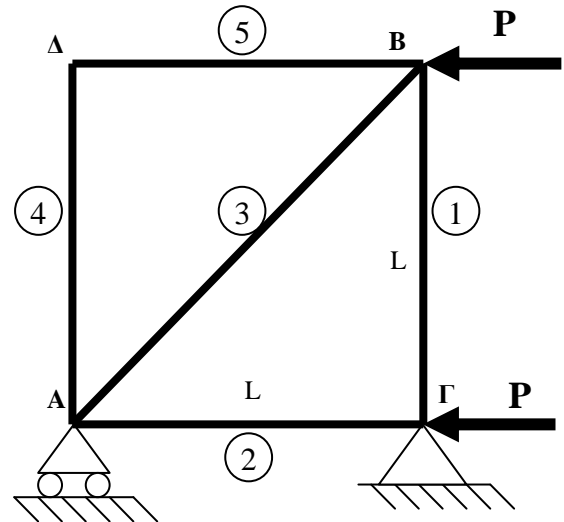


Σημ: Όλοι οι υπολογισμοί πραγματοποιούνται συναρτήσει της άγνωστης παραμέτρου "α".

ΘΕΜΑ 2^ο – Μονάδες 3.0

Στο δικτύωμα του σχήματος να προσδιοριστούν:

- α) οι αντιδράσεις στήριξης (1 μονάδα)
- β) οι δυνάμεις N_1, N_2, N_3, N_4 και N_5 , που καταπονούν τις ράβδους (2 μονάδες)

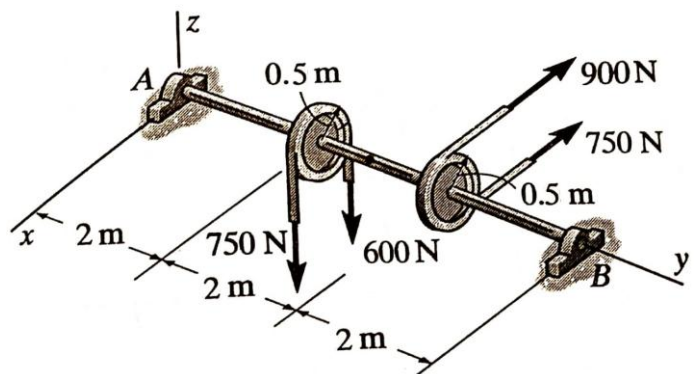


Σημ: Όλοι οι υπολογισμοί πραγματοποιούνται συναρτήσει της άγνωστης παραμέτρου "P".

ΘΕΜΑ 3^ο – Μονάδες 3.0

Για τη διάταξη του παρακάτω σχήματος να υπολογιστούν:

- α) οι αντιδράσεις στήριξης των ρουλεμάν (1 μονάδα)
- β) τα διαγράμματα εσωτερικών φορτίων [NQM] στον άξονα AB στο επίπεδο YZ (2 μονάδες)





ΤΥΠΟΛΟΓΙΟ

Συντεταγμένες (\bar{x}, \bar{y}) κεντροειδούς μιας επιφάνειας

$$\left(\bar{x} = \frac{\int x dA}{\int dA}, \bar{y} = \frac{\int y dA}{\int dA} \right) \quad \text{ή:} \quad \left(\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n A_i \bar{x}_i}{\sum_{i=1}^n A_i}, \bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^n A_i \bar{y}_i}{\sum_{i=1}^n A_i} \right)$$

Ορισμός αξονικών ροπών αδράνειας

$$I_x = \int_A y^2 dA, \quad I_y = \int_A x^2 dA$$

Ακτίνα αδράνειας

$$i_x = \sqrt{I_x/A}, \quad i_y = \sqrt{I_y/A}$$

Πολική ροπή

$$J = I_p = \int_A r^2 dA = I_x + I_y, \quad r^2 = x^2 + y^2$$

Τύποι μετασχηματισμού

$$I_{x'} = \frac{I_x + I_y}{2} + \frac{I_x - I_y}{2} \cos 2\theta - I_{xy} \sin 2\theta$$

Γινόμενο αδράνειας

$$I_{xy} = \int_A xy dA$$

Ροπή αντίστασης

$$W_x = I_x / |y_{max}|, \quad W_y = I_y / |x_{max}|$$

$$I_{y'} = \frac{I_x + I_y}{2} - \frac{I_x - I_y}{2} \cos 2\theta + I_{xy} \sin 2\theta$$

Ροπές αδράνειας σύνθετης επιφάνειας

$$I_x = \sum [I_{x_i}^{A_i} + A_i (\bar{y}_i - \bar{y})^2]$$

Γωνία κύριων αξόνων:

$$\tan(2\theta_0) = \tan(2\theta_p) = -\frac{2I_{xy}}{I_x - I_y}$$

$$I_{x'y'} = \frac{I_x - I_y}{2} \sin 2\theta + I_{xy} \cos 2\theta$$

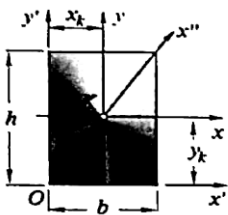
$$I_y = \sum [I_{y_i}^{A_i} + A_i (\bar{x}_i - \bar{x})^2]$$

Υπολογισμός κύριων ροπών αδράνειας

$$I_{xy} = \sum [I_{x_i y_i}^{A_i} + A_i (\bar{x}_i - \bar{x}) \cdot (\bar{y}_i - \bar{y})]$$

$$I_{max, min} = I_{1,2} = \frac{I_x + I_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)^2 + I_{xy}^2}$$

1. Τετράγωνο



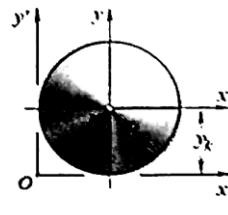
$$A = bh, \quad x_k = \frac{b}{2}, \quad y_k = \frac{h}{2}, \quad i_x = \frac{h}{\sqrt{12}}$$

$$I_x = \frac{bh^3}{12}, \quad I_y = \frac{b^3h}{12}, \quad I_{xy} = 0$$

$$I_{x'} = \frac{bh^3}{3}, \quad I_{y'} = \frac{hb^3}{3}, \quad I_{x'y'} = \frac{b^2h^2}{4}$$

$$I_p = \frac{bh}{12}(h^2 + b^2), \quad I_o = \frac{bh}{3}(h^2 + b^2)$$

5. Κύκλος



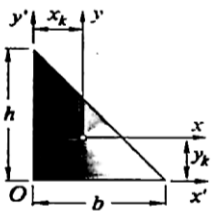
$$A = \pi R^2, \quad x_k = y_k = R, \quad i_x = \frac{R}{2}$$

$$I_x = \frac{\pi R^4}{4}, \quad I_y = \frac{\pi R^4}{4}, \quad I_w = 0$$

$$I_{x'} = I_{y'} = \frac{5\pi R^4}{4}, \quad I_{x'y'} = \pi R^4$$

$$I_p = \frac{\pi R^4}{2} = \frac{\pi t^4}{32}, \quad W_p = \frac{\pi R^3}{2}$$

2. Ορθογώνιο τρίγωνο



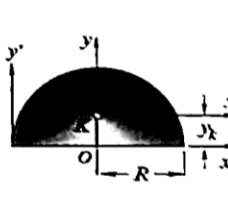
$$A = \frac{bh}{2}, \quad x_k = \frac{b}{3}, \quad y_k = \frac{h}{3}, \quad i_x = \frac{h}{\sqrt{18}}$$

$$I_x = \frac{bh^3}{36}, \quad I_y = \frac{b^3h}{36}, \quad I_{xy} = -\frac{b^2h^2}{72}$$

$$I_{x'} = \frac{bh^3}{12}, \quad I_{y'} = \frac{hb^3}{12}, \quad I_{x'y'} = \frac{b^2h^2}{24}$$

$$I_p = \frac{bh}{36}(h^2 + b^2), \quad I_{x'y'} = +\frac{b^2h^2}{72}$$

6. Ημικύκλιο



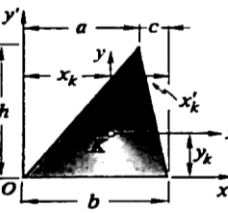
$$A = \frac{\pi R^2}{2}, \quad x_k = R, \quad y_k = \frac{4R}{3\pi}$$

$$i_x \approx 0.264R$$

$$I_x \approx 0.1098R^4, \quad I_y = \frac{\pi R^4}{8}, \quad I_w = 0$$

$$I_p = 0.503R^4, \quad I_{x'} = \frac{\pi R^4}{8}, \quad I_{x'y'} = \frac{8R^4}{9\pi}$$

3. Τυχαίο τρίγωνο



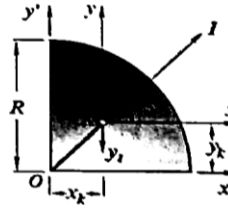
$$A = \frac{bh}{2}, \quad x_k = \frac{b+a}{3}, \quad x'_k = \frac{b+c}{3}, \quad y_k = \frac{h}{3}$$

$$I_x = \frac{bh^3}{36}, \quad I_y = \frac{bh(b^2 - cb + c^2)}{36}$$

$$I_{x'} = \frac{bh^3}{12}, \quad I_{y'} = \frac{bh(3b^2 - 3bc + c^2)}{12}$$

$$I_{xy} = -\frac{bh^2(2c-b)}{72}, \quad I_{x'y'} = \frac{bh^2(3b-2c)}{24}$$

7. Τεταρτοκύκλιο



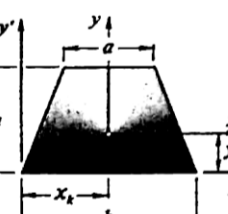
$$A = \frac{\pi R^2}{4}, \quad x_k = y_k = \frac{4R}{3\pi}, \quad i_x \approx 0.264R$$

$$I_x \approx 0.0549R^4, \quad I_y \approx 0.0549R^4$$

$$I_{xy} \approx -0.0164R^4, \quad I_{x'y'} \approx +0.0164R^4$$

$$I_{x'} = I_{y'} = \frac{\pi R^4}{16}, \quad I_{x'y'} = \frac{4R^4}{9\pi^2}$$

4. Ισοσκελές τραπέζιο



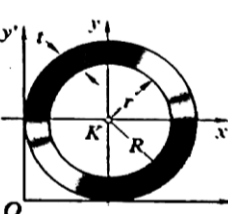
$$A = \frac{a+b}{2}h, \quad y_k = \frac{2a+b}{3(a+b)}h$$

$$x_k = \frac{b}{2}, \quad \text{για ορθογ.: } x_k = \frac{a^2 + ab + b^2}{a+b}$$

$$I_x = \frac{h^3}{36} \frac{a^2 + 4ab + b^2}{a+b}, \quad I_{x'} = \frac{h^3(3a+b)}{12}$$

$$I_y = \frac{h(a+b)(a^2 + b^2)}{48}$$

8. Σωλήνας



Χωρότητα:

$$A = \pi(R^2 - r^2), \quad i_x = \frac{\sqrt{R^2 + r^2}}{2}$$

$$I_x = \frac{\pi(R^4 - r^4)}{4}, \quad I_y = \frac{\pi(R^4 - r^4)}{4}$$

Λεπτότητα:

Μέση ακτίνα: $\bar{R} = r + t/2 = R - t/2$

$$A \approx 2\pi \bar{R} t, \quad x_k = y_k = \bar{R} + t, \quad i_x = \frac{\bar{R}}{\sqrt{2}}$$